



TITLE:

すべり・粘着境界条件をもつベナール対流の層流・乱流遷移(乱流の発生と統計法則)

AUTHOR(S):

水島, 二郎

---

CITATION:

水島, 二郎. すべり・粘着境界条件をもつベナール対流の層流・乱流遷移(乱流の発生と統計法則). 数理解析研究所講究録 1992, 800: 14-25

ISSUE DATE:

1992-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82851>

RIGHT:

すべり・粘着境界条件をもつベナール対流の層流・乱流遷移

和歌山大学・教育 水島二郎 ( Jiro Mizushima )

1. はじめに

流体物理学においては古くから形の形成の機構が動力的に研究されてきた。その代表的な例がベナール対流における形の研究である。流体層の水平方向の大きさと深さの比(アスペクト比)が大きく、鉛直方向に鏡面对称性がないときは、Bénard (1900) の実験でも見られるように六角形のセルパターンが生じる。六角形セルの安定性は Palm (1960) により調べられた。彼は流体の粘性が温度に依存すると仮定して六角形セルが安定になり得ることを示した。同様な研究は Busse (1967) や Palm, Ellingsen & Gjevik (1967) によっても行われている。また、Scanlon & Segel (1967) は表面張力の効果を取り入れることにより六角形セルが安定となることを示した。これらの結果は Koschmieder (1967) によって実験的に確かめられた。このような表面張力が重要な役割を果たしている場合の薄い流体層に発生する不安定性をベナール対流と区別してマランゴニ対流と呼ぶこともある。

アスペクト比が大きくしかも鉛直方向に鏡面对称性が仮定できる場合にはさらに多くの研究が行われている。線形安定性は Pellew & Southwell (1940)、Jeffreys (1928) および Reid & Harris (1958) により調べられた。弱非線形安定性は Gor'kov (1957) や Malkus & Veronis (1958) によって調べられ、ランダウ係数が負であること、すなわち超臨界平衡状態が存在することが示され、その定常解が求められている。また、Schlüter, Lortz & Busse (1965) は弱非線形安定性の方法を用いて定常解を計算し 2 次元ロール状の対流のみが安定であることを示し、その安定条件を求めた。さらに、ロール状の対流が上下 2 枚の平板間の熱輸送を最大にすることが示された。Busse (1967) はロール解の非線形定常解を求め、さらにそのロール解の 3 次元攪乱に対する線形安定性を調べた。その結果、ロール解は zigzag モードと cross-roll モードに対して不安定であり、ロール解が安定に存在するパラメータ領域は元の静止状態の不安定領域に比べてずっと小さくなることがわかった。Busse の結果は Busse & Whitehead (1971) により実験的に確かめられた。Clever & Busse (1974) と Busse & Clever (1979) はさらに詳しく定常ロール解の性質を調べ、その 3 次元攪乱に対する線形安定性を調べた。その結果、さきに挙げた zigzag と cross-roll の 2 つの不安定性以外にも Eckhaus instability, Oscillatory instability, knot instability, skewed varicose instability などがあることが明らかになった。そして、2 次元ロール解が安定に存在するパラメータ領域が詳しく調べられた。そのパラメータ領域はブッセのバレーンと呼ばれている。Busse が定常ロール解の 3 次元攪乱に対する安定性を調べることににより実際に出現するロール状対流の大きさを決定しようとしたのに対して、Mizushima & Fujimura (1992) はロール状攪乱の 1:3 共鳴が起こることを示し、1:3 共鳴が起こることによりロール解が安定に存在するパラメータ領域が狭くなることを示した。これらの非線形共鳴相互作用は Dangelmayr (1986), Dangelmayr & Armbruster (1986) により正規形の理論(The theory of normal forms) を用いてより一般的に  $n:m$  共鳴として定式化された。

アスペクト比が小さな場合には二つのモードが同時に不安定となる時のモード間の相互作用が Kidachi (1982) と Knobloch & Guckenheimer (1983) により調べられた。彼らは有限の直方体の流体層に発生するベナール対流では同時に二つのモードが不安定となり得ることを示し、それらのモードの相互作用を詳しく調べ、二つの解の重なり合った混合解も安定に存在する可能性を示した。これとよく似た解はアスペクト比が大きな場合について

Busse & Or (1986) によって得られている。ベナール対流中に発生するカオスや乱流への遷移については Gollub & Benson (1980), Ahlers & Behringer (1978), Libchaber, Fauvre & Laroche (1983) などにより実験的に、Curry (1978), Yahata (1983) により数値実験的に詳しく調べられた。

ここでは、底面が粘着境界条件、上面がすべり境界条件の場合のベナール対流を取り扱う。また、流れの場は2次元であると仮定をする。まず、線形安定性を調べ、次に非線形平衡解の性質を詳しく調べる。そこで得られた非線形平衡解の性質は 1:2, 1:2:3 共鳴等のモード間の相互作用で説明できることを弱非線形安定性理論により示す。さらに弱非線形安定性理論から得られる結果をさらに拡張することによって、モード間の相互作用のモデル化を行う。このモデル方程式を用いると、多くのモードが同時に不安定となるとときにどのモードまたはモードの組合せが安定に出現するか予測することが可能となることを示す。モード間の非線形共鳴の係数を大きくすると定常解がなくなり、周期解、二重周期解が出現し、やがてカオス解となることを示す。

## 2. 基礎方程式と線形安定性

深さが  $d$  の流体層を考える。底面は熱伝導性の良い固体壁、上面は自由表面とするが、表面張力の影響は小さいと仮定し考慮に入れないものとする。底面の温度が常に上面より  $\delta\theta$  だけ高くなるように底面を熱するか上面を冷やす。流体の熱拡散係数  $\kappa$  および動粘性係数  $\nu$  は温度に依らず一定であるとする。このときベナール対流を特長づける無次元パラメータは次式で定義されるレイリー数  $R$  とはプラントル数  $P$  の2つである。

$$R = \frac{\gamma g \delta \theta d^3}{\nu \kappa}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (1)$$

ここで、 $\gamma$  は流体の熱膨張係数であり、 $g$  は重力加速度を表す。

座標系として鉛直方向に  $z$  軸を、それに直角に  $x$  軸をとる。流れの場は2次元であると仮定しているので  $(x, z)$  平面での流れ関数  $\psi$  を導入することができる。浮力項を除いては流体の物質的な性質は一定であるとするブシネスク近似を用いると流れ関数  $\psi$  と熱伝導状態からの温度のずれ  $\theta$  の時間発展は無次元形で書くと次式のように表される。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - P \Delta^2 \psi + P R \frac{\partial \theta}{\partial x} = J(\psi, \Delta \psi), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \Delta \theta = J(\psi, \theta), \quad (3)$$

ここで、 $J(f, g)$  は次式で定義されるヤコビアンであり、

$$J(f, g) \equiv \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)},$$

$\Delta$  は次式で定義される  $(x, z)$ -平面における2次元ラプラシアンである。

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

$\psi$ と $\theta$ に対する境界条件は次のように書くことができる。

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \theta = 0 \text{ at } z = -1, \quad \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \theta = 0 \text{ at } z = 0. \quad (4)$$

$\psi$ と $\theta$ を次のように $x$ 方向にフーリエ展開する。

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n e^{in\alpha x}, \quad \theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n e^{in\alpha x}, \quad (5)$$

$\phi_n$ は純虚数であり、 $\phi_{-n} = -\phi_n$ の関係があり、 $\theta_n$ は実数で、 $\theta_{-n} = \theta_n$ の関係がある。フーリエ係数 $\phi_n$ と $\theta_n$ に対する方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial S_n \phi_n}{\partial t} - P S_n^2 \phi_n + i n \alpha P R \theta_n = N_{1n},$$

$$N_{1n} = \sum_{p+q=n} i \alpha [ p \phi_p S_q D \phi_q - q D \phi_p S_q \phi_q ], \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial t} + i n \alpha \phi_n - S_n \theta_n = N_{2n},$$

$$N_{2n} = \sum_{p+q=n} i \alpha [ p \phi_p D \theta_q - q D \phi_p \theta_q ]. \quad (7)$$

線形安定性調べるためには(6), (7)式において非線形項を無視し、 $n=1$ のフーリエモードのみを独立に取り扱うことができる。さらに、 $\partial/\partial t$ が線形増幅率 $\alpha c_i$ に比例するとした式を(4)と同等な境界条件のもとで解く。すべり・粘着境界条件をもつベナール対流の線形安定性は $z=-1$ と $z=1$ に平板境界をもつベナール対流において $z$ 方向に奇対称性を持つ攪乱に対する線形安定性と等価である。ベナール対流の線形安定性について次のことがわかっている。この問題では安定性の交代の原理 (principle of exchange of stability) が成り立ち、もし増幅する攪乱があるとすればその攪乱の波としての位相速度はゼロである。また、すべり・粘着条件を持つベナール対流における不安定モードは鉛直方向に対称性を持たない。図1に線形中立安定曲線を示す。線形中立安定曲線はプラントル数に依存しない。また図2に $P=7$ の場合の線形増幅率を示す。

攪乱の線形臨界レイリー数 $R_c$ は1100.649であり、そのときの水平方向の臨界波数 $a_c$ は2.682である。線形安定性理論の範囲内では増幅する攪乱の平面形については何もわからないが、仮に2次元ロール形の攪乱を考えると臨界波長は $2\pi/a_c = 2.343$ となり、およそ流体層の厚さの2倍の周期を持つロール状の2次対流が発生することになる。また、2枚の平板間に発生するベナール対流での臨界波数2.016と比べるとやや扁平になっている。

### 3. ロール状攪乱の非線形平衡解

この節では、非線形平衡解について詳しく調べる。平衡解を求めるため(6), (7)式で $\partial/\partial t = 0$ とおく。(5)式のフーリエ展開を $n=-N$ から $N$ までで打ち切る。さらに、前節で述べたように攪乱は $z$ 方向に対称性を持たないが、いま取り扱っている問題は $z=-1$ と $z=1$ に2枚の平板間のベナール対流において $z$ 方向に奇対称な攪乱が発生する問題と等

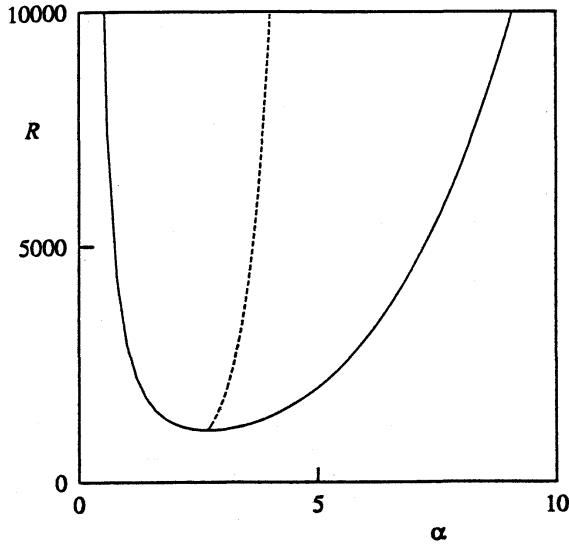


図 1. 線形中立安定曲線. プラントル数には依存しない. 点線は最大増幅波数を示す.

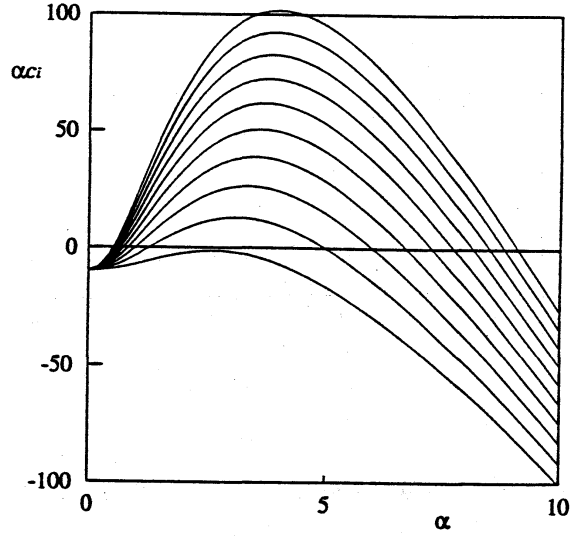


図 2. 線形増幅率 $\alpha_i$ の分布.  $P = 7.0$ .

価であるので,  $\phi_n$  および  $\theta_n$  を奇数次のチェビシェフ多項式で展開する. すなわち,  $\phi_n, \theta_n$  を次のように展開する.

$$\phi_n = i \sum_{m=0}^M a_{nm} (1-z^2)^2 T_{2m+1}(z), \quad \theta_n = \sum_{m=0}^M b_{nm} (1-z^2) T_{2m+1}(z). \quad (8)$$

ここで,  $T_n(z)$  は  $n$  次のチェビシェフ多項式である. これらの展開式を (2), (3) 式に代入し,  $\partial/\partial t = 0$  とおいて得られる  $2(N+1)(M+1)$  個の実係数  $a_{nm}$  と  $b_{nm}$  に対する代数方程式をガレルキン法を用いたニュートン・ラフソンの方法で解いた.

$P = 7.0$  の場合の非線形平衡解の  $z = -1/\sqrt{2}$  での振幅  $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$  の分布を図 3 に示す. 図 3 からわかるように平衡振幅は  $R = 1200$  に対しては 1 本の曲線から成り立っているが,  $R = 1500$  に対しては 2 本の曲線から,  $R = 2000$  に対しては 3 本の曲線から成り立っていることが分かる. さらに大きな  $R$  に対して平衡振幅を表す曲線はより多くの曲線から構成されるであろうことが容易に想像できる.

後の比較のために  $R = 1500$  での平衡振幅の分布を図 4 に示す. 計算の方法から分かるように図 4 に示す解は  $n = 0$  から  $n = N$  までのすべてのフーリエモードが含まれているという意味ですべて混合解である. この分岐ダイアグラムは Busse (1987) が示した分岐ダイアグラムと同じ形をしている. Busse は流体密度が温度の 2 次関数であることを仮定し, 鉛直方向に非対称な攪乱に対して弱非線形安定性理論によりこれと同じ形の分岐ダイアグラムを得た. 非対称な攪乱が発生するメカニズムは異なっているが Busse が求めた分岐ダイアグラムとここで得られた分岐ダイアグラムは本質的には同じものを表している. そのことは次節で弱非線形安定性を調べるとさらに明らかになる.

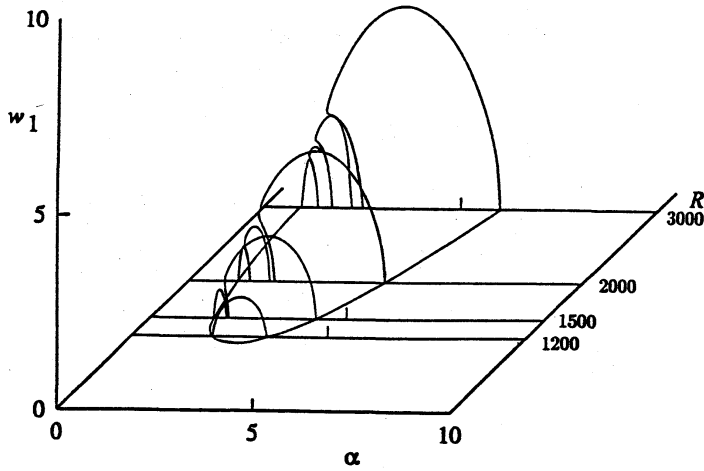


図3. 非線形平衡解の  $z = -1/\sqrt{2}$  での振幅  $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$  の分布.  $P = 7.0$ .

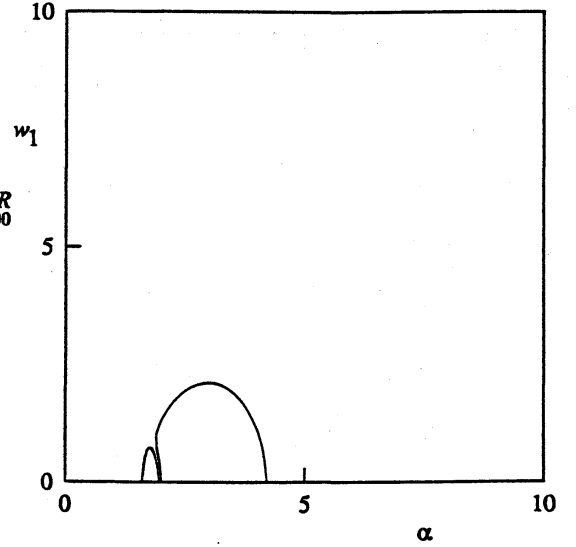


図4. 非線形平衡解の  $z = -1/\sqrt{2}$  での振幅  $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$  の分布.  $P = 7.0$ .  $R = 1500$ .

#### 4. 弱非線形安定性理論

前節ではロール状攪乱の非線形平衡解を直接に求めた。その結果、平衡振幅を表す曲線は  $R = 1200$  では1本であるが、レイリー数  $R$  が大きくなるに従って多くの曲線から構成されるようになることがわかった。この結果はモード間の非線形共鳴で説明できることをこの節で示す。

振幅展開法を用いた通常の弱非線形安定性理論に従えば波数  $\alpha$  を持つ単一の基本モードの複素振幅  $A_1$  に対する振幅方程式が次のように得られる。

$$\frac{dA_1}{dt} = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1. \quad (9)$$

この振幅方程式に従えば、増幅攪乱  $\lambda_1 > 0$  はランダウ係数  $\lambda_{-111}$  が負のときは平衡振幅  $|A_1|_{eq} = (-\lambda_1/\lambda_{-111})^{1/2}$  を持つ。比較的小さなレイリー数において  $\alpha_c = 2.682$  に対しては後に述べる高調波との共鳴の影響はなく(9)式が成り立ち、プラントル数  $P = 7.0$  において平衡振幅  $w_1 \equiv |A_1|_{eq}/\alpha$  を計算すると、図5のようになる。点線は振幅展開法を用いて(9)式の係数を評価したときの平衡振幅を示し、下側の実線は  $\lambda_{-111}$  を臨界点近傍で評価し  $\lambda_1$  は各レイリー数での値を用いて計算した平衡振幅を示している。また、真中の実線は前節で説明したフーリエ打ち切りの方法による結果である。(9)式から計算した値は臨界レイリー数付近ではほぼ正しいがレイリー数が大きくなるに従ってフーリエ打ち切りによる正確な値からずれていく。一方、 $\lambda_{-111}$  を臨界点近傍で評価しレイリー数によらず一定であるとした近似の方がフーリエ打ち切りによる値に近いことが分かる。

(9)式に従う限り、線形不安定な攪乱が振幅ゼロまで減衰することは考えることは不可能である。攪乱の振幅が小さくなると非線形項が無視でき、線形安定特性により攪乱は成長することが予想される。

鉛直流体層での自然対流の非線形発展過程においては基本波とその高調波との非線形共鳴により、同様な現象が現れた (Fujimura & Mizushima, 1987)。ここでも同じ非線形共鳴が起こっていると考えられる。基本波と高調波との非線形共鳴を考慮に入れると振幅方程式は次のようになる。

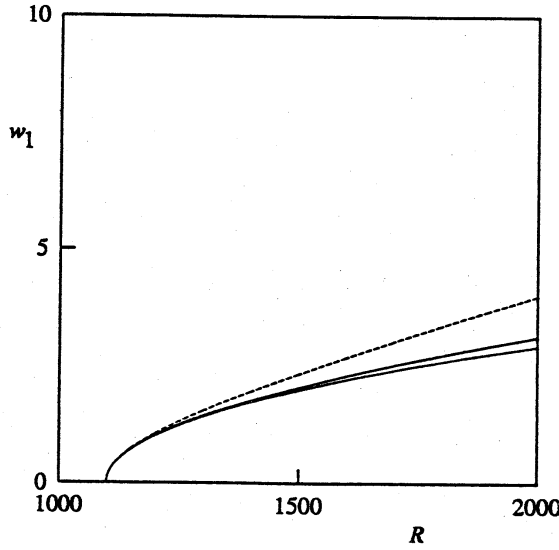


図5. 非線形平衡解の  $z=0$  での振幅  $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$  (真中の曲線) と弱非線形安定性理論から求めた  $w_1$  (点線) の比較. 下側の曲線も弱非線形安定性理論の結果であるが臨界点近傍で  $\lambda_{-111}$  を評価した.  $P=7.0$ .  $\alpha=2.682$ .

$$\frac{dA_1}{dt} = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-12} A_1^* A_2 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-212} |A_2|^2 A_1, \quad (10)$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \lambda_2 A_2 + \lambda_{11} A_1^2 + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2, \quad (11)$$

ここで、 $A_1$  及び  $A_2$  はそれぞれ基本波及び高調波に対する複素振幅である。また、すべての係数  $\lambda$  は実数である。この方程式は Busse (1987) が導いた方程式と同じ形をしており、Dangelmayr (1986), Dangelmayr & Armbruster (1986) が正規形の理論を用いて導いた方程式の特別な形になっている。

方程式 (10) と (11) の係数を実際に計算し、平衡解を求めた。図6に  $P=7.0$ 、 $R=1500$  における平衡振幅  $w_1$  の分布を示す。 $\alpha \simeq 1.85$  では  $2(\alpha c_i)_{\alpha=1.85} \simeq (\alpha c_i)_{\alpha=3.70}$  となり、狭い意味の共鳴が起こるので、 $1.67 \leq \alpha \leq 2.07$  に対しては (11) 式の  $\lambda_{11}$  の評価には可解条件を用いた。また、 $\alpha > 2.10$  では  $\lambda_2$  が負となるので、(9) 式を用いて  $w_1$  を求めた。点線で示した平衡振幅はこの平衡解が不安定、実線は安定であることを示している。特に、 $\alpha \leq 3.98$  においては平衡解はサブハーモニック不安定である。すなわち、この平衡解は  $\alpha = \alpha_1 > 3.98$ ,  $A_1 \neq 0$ ,  $A_2 = 0$  のシングルモード解であるが、この解を  $\alpha = \alpha_1/2$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 \neq 0$  のシングルモード解であると見なすことも可能である。このときこの平衡解は  $A_1$  の摂動に対して不安定となる。いいかえれば、 $\alpha = \alpha_1 \geq 3.98$  のシングルモード解は  $\alpha = \alpha_1/2$  の混合解に遷移する。

図6に示した弱非線形安定性理論から得られた結果はフーリエ打ち切りの方法から計算した結果図4と比較すると、定性的にはもちろんのこと定量的にもよく一致していることがわかる。前節でも述べたように図4、すなわち図6でも同様であるが、これらの図で示される分岐ダイアグラムは Busse (1987) が求めた分岐ダイアグラムと定性的には同じ形となっている。

$R=2000$  においては基本波と第一高調波および第二高調波との3波共鳴を取り扱わなければならない。 $R=3000$  ではそれらに加えてさらに第三高調波との共鳴も考慮にいれた4波共鳴を取り扱う必要がある。また、これまで行われてきた弱非線形安定性理論およ

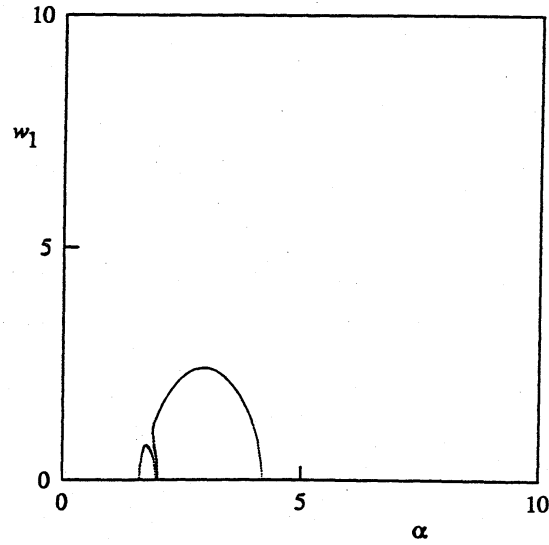


図 6. 弱非線形安定性理論から求めた  $w_1$  の分布.  $P = 7.0$ .  $R = 1500$ .

び非線形平衡解を求める方法では、ある波数  $\alpha_1$  を採りその波数を基本波としてその高調波  $n\alpha (n = 2, 3, 4, \dots)$  のみを考慮に入れているのであるが、 $R = 1500$  の場合に明らかになったように基本波のサブハーモニクス ( $\alpha_1/2$ ) を考慮に入れれば新たな不安定が生じ流れの遷移の仕方が変わってしまうことがありうる。この議論をさらに拡張すると基本波のサブハーモニクスだけではなく  $\alpha_1$  以外のすべての波数をもつ攪乱が基本波に影響を与える可能性が想像できる。このように考えると‘基本波’という概念があまり意味をもたないことが分かる。次節ではこれらの非線形共鳴を含む非線形相互作用をもっと一般的に取り扱う方法について考える。

### 5. モデル方程式

前節で述べたようにある波数のモードの振幅の発展はそのモード以外のすべての増幅モードからも影響を受けるはずである。そのような発想から振幅方程式を導くことを考えてみよう。ある波数をもつモードの時間発展には連続無限個のモードが影響を与えるが、ここではもう少し問題を簡単化して連続的な波数をもつ無限個のモードを有限個のモードで代表することを考える。波数領域  $0 < \alpha \leq \alpha_{max}$  の範囲にあるモードを考え、この波数領域を  $N$  等分して波数  $\Delta\alpha \times n (n = 1, 2, \dots, N)$  を持つ  $N$  個のモードのみを取り扱うことにする。ここで、 $\Delta\alpha = \alpha_{max}/N$  である。基礎方程式 (2), (3) から次の形の振幅方程式を振幅展開の方法により導くことができる。

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_p f_{np} A_{n-p} A_p + \sum_{p,q} g_{npq} A_{n-p-q} A_p A_q, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (12)$$

ここで、いくつかの注意が必要である。中心多様体定理によれば、系は不安定モードの振幅だけで記述でき、安定モードの振幅は不安定モードの振幅と関数関係で結ばれている。しかし、ここでは特に安定モードの振幅も方程式 (1) で支配されているとしている。方程式 (12) ではすべてのモードが非線形共鳴を行っており、前節で求めた振幅方程式の自然な一般



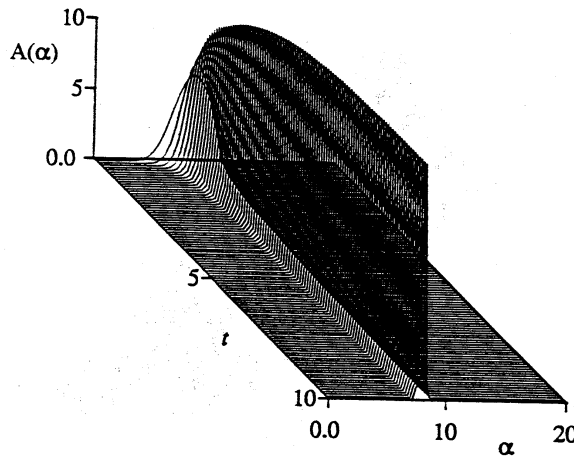


図 7. 非線形共鳴がないときの振幅の時間発展.  $R = 10000$ ,  $d_{np} = -1.0$ .

化になっている。方程式 (12) の導出に関していえば振幅展開の範囲内で厳密であり、連続量  $\alpha$  を離散的な有限個のモードで近似はしているがモデルではない。しかし、(12) 式は係数として  $a_n$  が  $N$  個、 $f_{np}$  が  $N^2$  個、 $g_{npq}$  が  $N^3$  個あり、現実にこれだけの係数を正しく評価することは大変である。ここで、‘正しく’ という意味は係数の評価においては非斉次方程式を解く必要があるが、狭い意味の共鳴があるときには前節でも行ったように特別な配慮が必要であり、このため係数の評価を‘正しく’ 行うのは非常に難しくなるという意味である。

モデル方程式 (12) において係数  $f_{np} \equiv 0$ 、 $p+q \neq 0$  に対しては  $g_{npq} \equiv 0$  の特別な場合について調べることにする。このとき方程式 (12) は

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_p d_{np} A_p^2 A_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

となる。

方程式 (13) 式の定常解は単一モード解と混合モード解がある。単一モード解は  $A_{neq} = \sqrt{-a_n/d_{nn}}$  となる。この単一モード解は自分自身のゆらぎに対しては常に安定であるが  $q \neq n$  であるモード  $q$  のゆらぎに対しては  $a_q < a_n \times d_{qn}/d_{nn}$  のとき安定であり、 $a_q > a_n \times d_{qn}/d_{nn}$  のとき不安定である。このことから、もし  $d_{np}$  が  $q$  に依存せずに一定であるならば線形増幅率が最大のモードだけが安定に残り、それ以外のモードは不安定になり、そのエネルギーは線形増幅率最大のモードに吸収されてしまうことが想像できる。 $d_{np}$  が  $q$  に依存して変化するときでも比  $d_{qn}/d_{nn}$  が 1 に近いときには線形増幅率最大のモードを含んでその周りのモードが生き残り、それ以外のモードは不安定なって、減衰してしまう。

混合モード解は  $d_{np}$  が  $n$  と  $p$  に依存しないで一定の時には存在しないが、一定でないときには存在する。混合解が存在する条件は  $d_{np}$  がつくる行列の行列式が正則であることである。混合モード解の安定条件は簡単に書き下すことができるが、その物理的解釈は簡単ではないのでここでは議論を行わないことにする。

方程式 (13) を初期値問題として数値的に解く。 $\alpha_{max} = 20.0$ ,  $\Delta\alpha = 0.2$ ,  $N = 100$  と

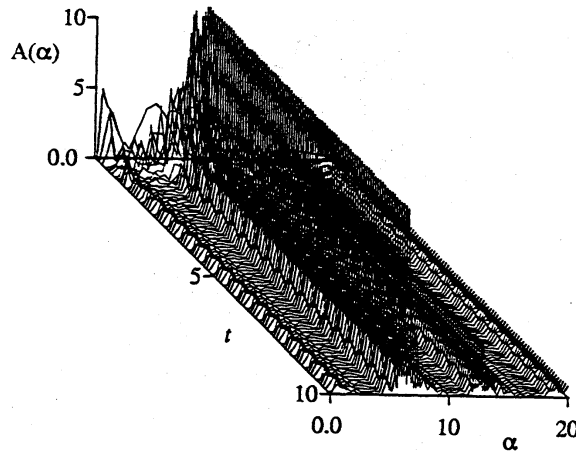


図 8. 非線形共鳴があるときの振幅の時間発展.  $R = 10000$ ,  $b_{np} = -3.9$ ,  $c_{np} = 3.9$ .

する。線形増幅率は図 2 に示したものをうい、ランダウ係数に相当する係数  $d_{np}$  は最も簡単な場合として  $d_{np} \equiv -1.0$  を用いることにする。初期条件は  $A_n = 0.01$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) とした。 $R = 10000$  の場合の結果を図 7 に示す。この図で  $A(\alpha) = A_n$ ,  $\alpha = n \times 0.2$  である。図から分かるように初め ( $t \leq 0.5$ ) は各モードはそれぞれの持つ線形増幅率に従って増幅するが、振幅が大きくなると非線形効果によって、より増幅率の大きいモードによりその成長が抑えられ、最大増幅率を持つモード以外は減衰させられてしまう。その結果充分時間が経ったのちには最大増幅モードのみが生き残り他のモードは減衰してしまう。この結果は線形安定性理論では複数のモードが不安定であるが、実験ではある波数のモードが現れることが多い理由の説明になっている。また、この結果は上の単一モードの安定性から想像できる結果ともよく一致している。ここで得られた結論は Stewartson & Stuart (1971) の得た結論と同じであるが、その意味しているところは全く異なっている。

次に全てのモードが共鳴をする場合を取り扱う。ただし、2 次の非線形相互作用はすべて取り入れるが、3 次の非線形項は  $A_p^2 A_n$  の形の項のみを取入れ、それ以外の 3 次の非線形項は重要でないと仮定する。この仮定では変調不安定モードを排除していることになっている。変調不安定性は一般に定常波解を変調し新たにもう 1 つの振動数を生み出す可能性をもっているが後で示すように 2 次の非線形項が同じ役割を果たすことが分かる。このとき方程式 (13) は次のように書き換えることができる。

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_{p=1}^{N-n} b_{np} A_p A_{n+p} + \sum_{p=1}^{[n/2]} c_{np} A_p A_{n-p} + \sum_{p=1}^N d_{np} A_p^2 A_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

方程式 (14) を初期値問題として数値的に解く。ここでも  $\alpha_{max} = 20.0$ ,  $\Delta\alpha = 0.02$ ,  $N = 100$  とする。また、ランダウ係数に相当する係数  $d_{np}$  は最も簡単な場合として  $d_{np} \equiv -1.0$  を用いる。共鳴項の係数を  $b_{np} = -c_{np} = \beta = 3.9$  とし、初期条件を  $A_1 = 0.01$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ) にとり、 $R = 10000$  とした場合の結果を図 8 に示す。この図から分かるように  $A_n$  は定常的な値に漸近するのではなく周期的な振舞いをしていることが

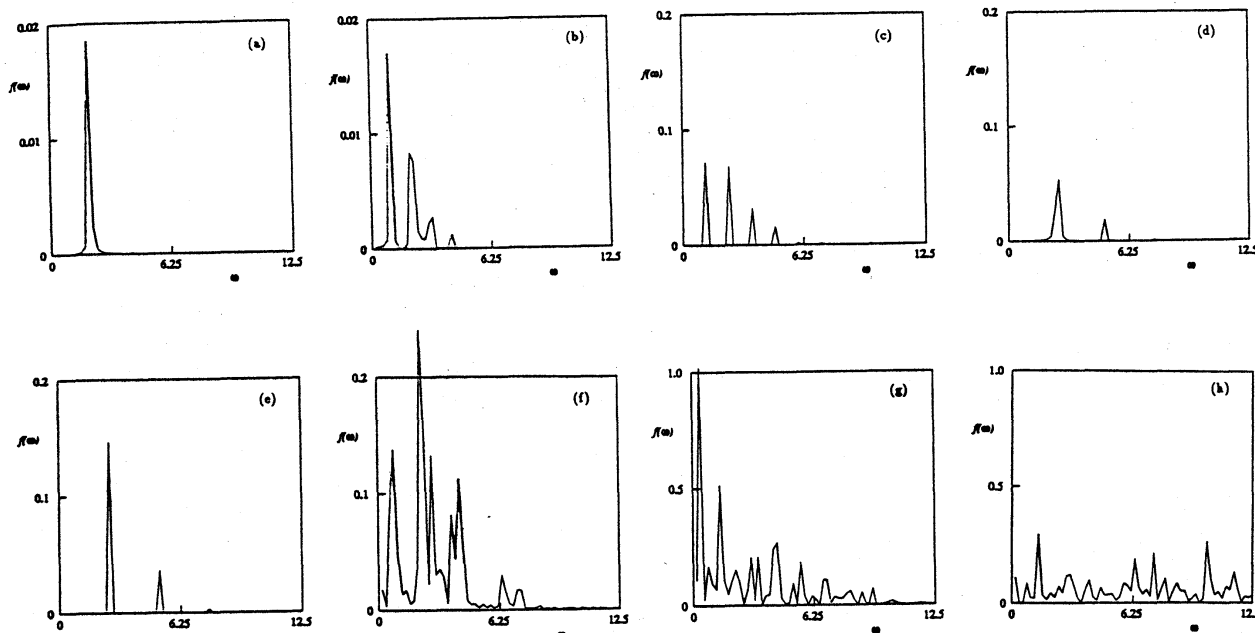


図9. 非線形共鳴があるときの振幅の時間発展のフーリエ変換.  $R = 10000$ . (a)  $-b_{np} = c_{np} = \beta = 3.9$ . (b)  $\beta = 4.0$ . (c)  $\beta = 4.3$ . (d)  $\beta = 4.4$ . (e)  $\beta = 4.5$ . (f)  $\beta = 5.0$ . (g)  $\beta = 6.0$ . (h)  $\beta = 10.0$ .

わかる。  $\beta$  の値のみを変えて同様の計算を行った。 その結果、  $\beta < 3.9$  では各振幅は定常状態へ近づいていく。  $\beta = 3.9$  で各振幅は振動数  $\omega_1 = 1.95$  の振動解を持つ。  $\beta = 4.0$  で振動数が  $\omega_1 = 0.98$ ,  $\omega_2 = 2.16$ ,  $\omega_3 = 3.15$ ,  $\omega_4 = 4.13$  の振動が現れ2重周期運動へと遷移する。 これは実験でもよく報告されている周期倍遷移であるが、  $\beta$  を4.1にすると周期運動がなくなり各振幅はまた定常解へ近づいていく。 さらに  $\beta$  を大きくすると  $\beta = 4.3$  で振動数  $\omega_1 = 1.18$  とその整数倍の振動数を含む振動が現れる。  $4.4 \leq \beta \leq 4.7$  では  $\omega_1 = 2.56$  とその整数倍の振動数を含む振動となり、さらに  $\beta$  を大きくすると  $\beta = 4.8$  で再び振動がなくなり定常解に近づく。 さらに  $\beta$  を大きくすると  $\beta = 4.9$  で  $\omega_1 = 0.78$  とその整数倍の振動数を含む振動が現れ、連続スペクトルに近づく。  $\beta = 10.0$  ではほぼ完全なホワイトノイズと見なせるようなスペクトルが得られる。  $A(\alpha = 4.0)$  のフーリエ変換  $f(\omega)$  の分布をいくつかの  $\beta$  の値について描いた図を図9に示す。

横軸に  $A(\alpha = 4.0, t = t)$  縦軸に  $A(\alpha = 4.0, t = t + \Delta t)$  を採ったときの位相図を  $R = 10000$ ,  $\beta = 5.0$  の場合について図10に示す。 この図から振幅の時間変化はカオス的になっていることが分かる。 ここではモデル方程式を用いてベナール対流が不安定となるときの各モードの時間発展をモデル方程式を用いて調べた。 その結果、これまでに実験で報告されている遷移よりも複雑な遷移の仕方をすることが分かった。 ただ、注意しておかなければならないのはここでは共鳴項の係数  $b_{np}$ ,  $c_{np}$  を変えて計算を行ったが、実際の実験においてはレイリー数を変えて実験を行い、共鳴項の係数は与えるものではなく、レイリー数が決まると自動的に決まるものであるということである。

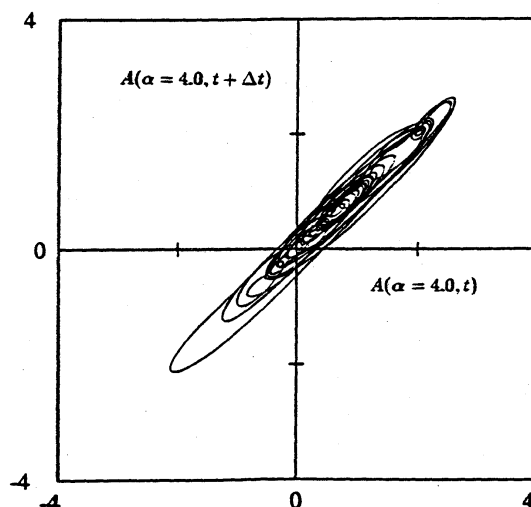


図 10. 振幅  $A(t)$  の位相図.  $R = 10000$ ,  $-b_{np} = c_{np} = \beta = 5.0$ .

## References

- Ahlers, G. & Behringer, R.P. 1978 Evolution of turbulence for the Rayleigh-Bénard instability, *Phys. Rev. Lett.* **40**, pp712-719.
- Bénard, H. 1900 Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Revue Gén. Sci. Pur. Appl.* **11**, 1261-1271 and 1309-1328.
- Busse, F.H. 1967 On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below, *J. Math. and Phys.* **46**, 140-150.
- Busse, F.H. 1987 Transition to asymmetric convection rolls, in *Bifurcation: Analysis, Algorithms, Applications* (ed. T. Küpper, R. Seydel and H. Troger), pp.18-26. Birkhäuser.
- Busse, F.H. & Clever, R.M. 1979 Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number, *J. Fluid Mech.* **91**, 319-335.
- Busse, F.H. & Or, A.C. 1986 Subharmonic and asymmetric convection rolls, *Z. Angew. Math. Phys.* **37**, 608-623.
- Busse, F.H. & Whitehead, J.A. 1971 Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid, *J. Fluid Mech.* **47**, 305-320.
- Clever, R.M. & Busse, F.H. 1974 Transition to time-dependent convection, *J. Fluid Mech.* **65**, 625-645.
- Curry, J.H. 1978 A generalized Lorenz system, *Comm. Math. Phys.* **60**, pp193-204.
- Dangelmayr, G. 1986 Steady-state mode interactions in the presence of  $O(2)$ -symmetry, *Dyn. Stab. Syst.* **1**, 159-185.
- Dangelmayr, G. & Armbruster, D. 1986 Steady-state mode interactions in the presence of  $O(2)$ -symmetry and in non-flux boundary value problems, *Contemp. Maths* **56**, 53-67.

- Fujimura, K. & Mizushima, J. 1987 Nonlinear interaction of disturbances in free convection between vertical parallel plates, in *Nonlinear Wave Interactions in Fluids* (ed. R.W.Miksad et al.), pp.123-130. ASME-AMD-vol.87
- Gollub, J.P. & Benson, S.V. 1980 Many routes to turbulent convection, *J. Fluid Mech.* **100**, 449-470.
- Gor'kov, L.P. 1957 Stationary convection in a plane liquid layer near the critical heat transfer point, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 402-407.
- Jeffreys, H. 1928 Some cases of instability in fluid motion, *Proc. R. Soc. Lond.* **A118**, 195-208.
- Kidachi, H. 1982 Side wall effect on the pattern formation of the Rayleigh- Bénard convection, *Prog. Theor. Phys.* **68**, 49-63.
- Koschmieder, E.L. 1967 On Convective under an air surface, *J. Fluid Mech.* **30**, 9-15.
- Knobloch, E. & Guckenheimer, J. 1983 Convective transitions induced by a varying aspect ratio, *Phys. Rev. A* **27**, 408-417.
- Malkus, W.V.R. & Veronis, G. 1958 Finite amplitude cellular convection, *J. Fluid Mech.* **4**, 225-260.
- Libchaber, A., Laroche, C. & Fauve, S. 1982 Period doubling cascade in mercury, a qualitative measurement, *J. Phys. Lett.* **43**, 211-216.
- Mizushima, J. & Fujimura, K. 1992 Higer harmonic resonance of two-dimensional disturbances in Rayleigh-Bénard convection, *J. Fluid Mech.* **234**, 651-667.
- Palm, E. 1960 On the tendency towards hexagonal cells in steady convection, *J. Fluid Mech.* **8**, 183-192.
- Palm, E., Ellingsen, T. & Gjevik, B. 1967 On the occurrence of cellular motion in Bénard convection, *J. Fluid Mech.* **30**, 651-661.
- Pellew, A. & Southwell, R.V. 1940 On maintained convective motion in a fluid heated from below, *Proc. R. Soc. Lond.* **A176**, 312-343.
- Reid, W.H. & Harris, D.L. 1958 Some further results on the Bénard problem, *Phys. Fluids* **1**, 102-110.
- Scanlon & Segel, L.A. 1967 Finite amplitude cellular convection induced by surface tension, *J. Fluid Mech.* **30**, 149-162.
- Schlüter, A., Lortz, D. & Busse, F.H. 1965 On the stability of steady finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.* **23**, 129-144.
- Stewartson, K., & Stuart, J.T. 1971 A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* **48**, 529-545.
- Yahata, Y. 1983 Period doubling cascade in the Rayleigh-Bénard convection, *Prog. Theor. Phys.*, **69**, pp1802-1805.